DS n°1 : Logique et calcul

Durée : 2 heures. Calculatrices non autorisées.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \leq |y|$
2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x$
3) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x^2 \neq y^2 \implies x \neq y$

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 7$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$$

1) Calculer u_2 et u_3.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n + 3^{n+1}$.

Exercice 3

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x-y) = x - f(y)$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produit suivants :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$ où x est un réel.
2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-1}{k+1}$
3) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{2k+2}$

Tournez la page S.V.P.

Problème court

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} j^2 \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} k \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

1) Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $S_n = \dfrac{1}{3}C_n + \dfrac{1}{2}B_n + \dfrac{1}{6}A_n$.

3) Intervertir les sommes dans S_n, puis montrer que $S_n = (n+1)B_n - C_n$.

4) En utilisant les questions précédentes, déterminer la valeur de C_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour la dernière question, on admettra que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

5) Par ce qui précède, et sans utiliser les questions 1) à 4), trouver une autre expression de C_n en fonction de n, A_n, B_n *(on ne demande pas de calculer explicitement C_n).*